2.5 Teorema de Jordan

En esta sección queremos abordar ya el caso general de un endomorfismo $f : V \to V$ cualquiera (no necesariamente con un único autovalor). Recordemos que seguimos dando por ciertos los Teorema A y B. En realidad, asumiendo estos teoremas y con lo visto en la sección anterior, el caso general es casi inmediato.

■ **Proposición** *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor. Entonces los subespacios propios generalizados $E_k(\lambda)$ de λ son subespacios invariantes de f. En particular, el subespacio máximo $M(\lambda)$ de λ es un subespacio invariante de f.*

Demostración. Dado $v \in E_k(\lambda)$, queremos probar que $f(v) \in E_k(\lambda)$. Se tiene que

$$(f - \lambda I)(v) = f(v) - \lambda v \Rightarrow f(v) = v + (f - \lambda I)(v).$$

Por un lado tenemos que $v \in E_k(\lambda)$ pero también $(f - \lambda I)(v) \in E_{k-1}(\lambda) \subset E_k(\lambda)$, y puesto que $E_k(\lambda)$ es un subespacio vectorial de V, deducimos que $f(v) = v+(f-\lambda I)(v) \in E_k(\lambda)$. □

■ **Teorema** (de Jordan) *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Supongamos que todas raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ del polinomio característico de f pertenecen a $\mathbb{K}$. Entonces existe una base B de V respecto de la cual f tiene una matriz de Jordan.*

Demostración. Consideremos para cada λ_i su subespacio máximal $M(\lambda_i)$. Por la proposición anterior, $M(\lambda_i)$ es un subespacio invariante de f. Por tanto, podemos considerar el endomorfismo

$$f|_{M(\lambda_i)} : M(\lambda_i) \to M(\lambda_i).$$

El único autovalor de $f|_{M(\lambda_i)}$ es λ_i, ya que si tuviese otro autovalor $\mu \neq \lambda_i$, entonces por definición existiría un vector $w \in M(\lambda_i)$ no nulo tal que $f|_{M(\lambda_i)}(w) = f(w) = \mu w$. Es decir μ debe ser un autovalor de f, por tanto $\mu = \lambda_j$ con $i \neq j$, y entonces $w \in E_1(\lambda_j) \subset M(\lambda_j)$, pero ya sabemos que $M(\lambda_i) \cap M(\lambda_j) = 0$ por el Teorema B, contradicción. Por lo visto en la sección anterior, podemos encontrar una base B_i de $M(\lambda_i)$ tal que $f|_{M(\lambda_i)}$ tiene una matriz de Jordan J_i. Ahora bien, si consideramos la unión de todas esas bases

$$B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$$

nos proporciona una base de $M(\lambda_1) \bigoplus \cdots \bigoplus M(\lambda_r)$. Por el Teorema A también sabemos que $\dim(M(\lambda_i)) = \mathrm{mult}_a(\lambda_i)$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\dim(M(\lambda_1) \bigoplus \cdots \bigoplus M(\lambda_r)) &= \dim(M(\lambda_1)) + \cdots + \dim(M(\lambda_r)) = \\
&= \mathrm{mult}_a(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{mult}_a(\lambda_r) = \\
&= \text{grado del polinomio característico} = n,
\end{aligned}$$

es decir, que $M(\lambda_1) \bigoplus \cdots \bigoplus M(\lambda_r) = V$ y B es por tanto una base de V. Finalmente, la matriz de f respecto de la base B es la matriz de Jordan,

$$\left(\begin{array}{c:c:c}
J_1 & & \\ \hdashline
& \ddots & \\ \hdashline
& & J_r
\end{array}\right)$$

□

Ejemplo 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2-\lambda & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2.$$

Y por tanto los autovalores son $\lambda =_1$ y $\lambda_2=2$ ambos con multiplicidad algebraica 2.

Cálculo de los subespacios propios de $\lambda_1=1$. Calculamos primero $E_1(1)$, es decir, los autovectores de $\lambda_1=1$. Buscamos $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} 0=0\\ -x+y+z=0\\ -x+z=0\\ -x+z=0 \end{cases}$$

de lo que deducimos que

$$V_1=E_1(1)=L[(1,0,1,0),(0,0,0,1)]$$

Como la dimensión de $E_1(1)$ coincide con la multiplicidad algebraica de $\lambda_1=1$ ya sabemos entonces que $M(1)=E_1(1)$.

Cálculo de los subespacios propios de $\lambda_2=2$. Calculamos primero $E_1(2)$, es decir, los autovectores de $\lambda_2=2$. Buscamos $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tales que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} -x=0\\ -x+z=0\\ -x=0\\ -x+z-t=0 \end{cases}$$

de lo que deducimos que

$$V_2=E_1(2)=L[(0,1,0,0)].$$

De forma inmediata ya sabemos entonces que $\dim(E_2(2))=2$ y $M(2)=E_2(2)$. Pero busquemos una base de $E_2(2)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{(A-2I)^2}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} x=0\\ 0=0\\ x=0\\ x-z+t=0 \end{cases}$$

de lo que deducimos que

$$E_2(2)=L[(0,0,1,1),(0,1,0,0)].$$

Forma canónica de Jordan de A. Con los cálculos anteriores ya sabemos que la forma canónica de Jordan de A va a ser

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz P. Para los bloques de orden 1 correspondientes a $M(1)$ podemos tomar la base que hemos calculado anteriormente

$$\{(0,0,0,1),(1,0,1,0)\}.$$

Para el bloque de Jordan de orden 2 correspondiente a $M(2)$, debemos aplicar lo que aprendimos en la Sección 2.4. Así pues, buscamos una base de $E_1(2)$ y la completamos hasta obtener una base de $M(2)=E_2(2)$. Observamos que de hecho las mismas bases que nos han quedado después de los cálculos nos sirven. Tomamos por tanto el vector $(0,0,1,1)$ y calculamos su imagen por medio de $A-2I$, que da la casualidad que nos queda $(0,1,0,0)$. Tenemos por tanto que el endomorfismo que tiene matriz asociada A respecto de la canónica, tiene respecto de la base

$$B=\{(0,0,0,1),(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\},$$

la matriz J anterior. Así pues, dada la matriz de cambio de base de B a canónica,

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos la igualdad $A=PJP^{-1}$.

Ejemplo 3 Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5-\lambda & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 7-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\text{cuatro hojas de cálculos después}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2.$$

Y por tanto los autovalores son $\lambda =_1$ y $\lambda_2=2$ ambos con multiplicidad algebraica 2.

Cálculo de los subespacios propios de $\lambda_1=1$. Calculamos primero $E_1(1)$, es decir, los autovectores de $\lambda_1=1$. Buscamos $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} x+2y-3z+4t=0 \\ -2x+y+z=0 \\ 3x+3y-6z+7t=0 \\ 4x+2y-6z+6t=0 \end{cases}$$

de lo que deducimos que

$$V_1=E_1(1)=L[(1,1,1,0)]$$

En particular eso nos indica que $\dim(E_2(1))=2$ y $M(1)=E_2(1)$. Busquemos una base de $E_2(2)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & -12 & 12 \\ 6 & 4 & -10 & 10 \end{pmatrix}}_{(A-2I)^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo que deducimos que

$$E_2(1) = L[(1,1,0,-1),(0,0,1,1)].$$

Cálculo de los subespacios propios de $\lambda_2 = 2$. Calculamos primero $E_1(2)$, es decir, los autovectores de $\lambda_2 = 2$. Buscamos $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -7 & 7 \\ 4 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo que deducimos que

$$V_2 = E_1(2) = L[(1,-1,2,2)].$$

De forma inmediata ya sabemos entonces que $\dim(E_2(2)) = 2$ y $M(2) = E_2(2)$. Pero busquemos una base de $E_2(2)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{(A-2I)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de lo que deducimos que

$$E_2(2) = L[(1,2,1,0),(0,3,-1,-2)].$$

Forma canónica de Jordan de A. Con los cálculos anteriores ya sabemos que la forma canónica de Jordan de A va a ser

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz P. Busquemos la base que corresponde al bloque orden 2 de $M(1)$. Tomamos por ejemplo la base $\{(1,1,1,0)\}$ de $E_1(1)$ que habíamos calculado, y la completamos a una de $E_2(1)$, por ejemplo, $\{(1,1,1,0),(0,0,1,1)\}$. Tomamos el vector que no está en $E_1(1)$, es decir, $(0,0,1,1)$, y le aplicamos $A - I$, lo que casualmente da como resultado $(1,1,1,0)$ (sabíamos en cualquier caso que el resultado tenía que ser un múltiplo de $(1,1,1,0)$). Así pues, debemos tomar la base

$$\{(1,1,1,0),(0,0,1,1)\}$$

para el bloque de $M(1)$.

Para el bloque de Jordan de orden correspondiente a $M(2)$, tomamos por ejemplo la base $\{(1,-1,2,2)\}$ de $E_1(1)$ que habíamos calculado, y la completamos hasta obtener una base de $E_2(2)$, por ejemplo, $\{(1,-1,2,2),(1,2,1,0)\}$. Tomamos el vector que no está en $E_1(2)$, es decir, $(1,2,1,0)$, y le aplicamos $A - 2I$, lo que casualmente da como resultado $(1,-1,2,2)$. Así pues, debemos tomar la base

$$\{(1,-1,2,2),(1,2,1,0)\}$$

para el bloque de $M(2)$.

Tenemos por tanto que el endomorfismo que tiene matriz asociada A respecto de la canónica, tiene respecto de la base

$$B = \{(1,1,1,0),(0,0,1,1),(1,-1,2,2),(1,2,1,0)\},$$

la matriz J anterior. Así pues, dada la matriz de cambio de base de B a canónica,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos la igualdad $A = PJP^{-1}$.